לוגיקה (1) – תרגיל 10

1. יהיו $\varphi(x),\psi(x)$ נוסחות שבהן x המשתנה החופשי היחיד (זו אינה הנחה מהותית, אך היא מפשטת במידת מה את הכתיבה).
   א. נניח ש- $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ האם נובע בהכרח ש- $\forall x\varphi(x)\equiv\forall x\psi(x)$.
   ב. נניח ש- $\forall x\varphi(x)\equiv\forall x\psi(x)$. האם נובע ש- $\varphi(x)\equiv\psi(x)$.
   ג. נניח ש- $\exists x\varphi(x)\equiv\exists x\psi(x)$ האם בהכרח נובע שאם קיים $A'\models\exists x\varphi(x)$ אז יש מודל A והשמה s כך ש- $A(\varphi)[s]=A(\psi)[s]=T$.

2. הוכיחו את השקילויות הבאות:
   א. $\forall x(\varphi\wedge\psi)\equiv\forall x\varphi\wedge\forall x\psi$.
   ב. $\exists x(\varphi\vee\psi)\equiv\exists x\varphi\vee\exists x\psi$.
   ג. אם x אינו מופיע ב- ψ עבור אילו קשרים דו-מקומיים (מבין $\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$) מתקיים $\forall x(\varphi(x)\circ\psi)\equiv\forall x\varphi(x)\circ\psi$.
   ד. עבור הקשר/קשרים מסעיף ג' עבורם השקילות אינה מתקיימת נסחו והוכיחו שקילות דומה (שכן מתקיימת).

3.
   א. יהי t ש"ע ויהי x משתנה אישי שאינו מופיע ב- t. הראו שלכל מבנה A ולכל השמה s, $A(sub(t,x,t'))[s]=A(t)[s]$.
   ב. נסחו במדויק והוכיחו את הטענה המקבילה עבור נוסחות (שימו לב – מהי המקבילה הנכונה במקרה זה ל-"x אינו מופיע ב-t").

4. נגדיר ברקורסיה פונקציה $rep(\varphi,\bar{x},\bar{y})$ - המחליפה את המשתנים המכומתים $x_1,\ldots x_n$ במשתנים $y_1,\ldots y_n$:
   א. כתבו את הגדרת $rep(\varphi,\bar{x},\bar{y})$ עבור המקרים הקלים: φ אטומית, $\varphi=\neg\psi$ ו- $\varphi=\psi_1\circ\psi_2$.
   ב. עבור $\varphi=Qy\psi$ ל- y שאינו מבין $x_1,\ldots x_n$ נגדיר $rep(\varphi,\bar{x},\bar{y})=(Qy)rep(\psi,\bar{x},\bar{y})$. עבור $\varphi=Qx_i\psi$ נגדיר $rep(\varphi,\bar{x},\bar{y})=(Qy_i)sub(rep(\psi,\bar{x},\bar{y}),x_i,y_i)$.
   הוכיחו באינדוקציה על יצירת הנוסחה שאם φ נוסחה כלשהי ו- $y_1,\ldots y_n$ משתנים חדשים שאינם מופיעים ב- φ אזי y_i כשר להצבה עבור x_i ב- $rep(\varphi,\bar{x},\bar{y})$. (בכך תראו, למעשה, את השלב העיקרי בהוכחה שההגדרה לעיל היא טובה).

5. תהי $L=\{r,f\}$ שפה לתחשיב היחסים שבה f סימן פונקציה חד מקומי ו- r סימן יחס דו-מקומי.
   א. כמה מבנים שונים ל-L יש בעולם בן שני איברים $A=\{a,b\}$.
   ב. תארו לפחות 8 מבנים לא איזומורפים ל-L בעולם $A=\{a,b\}$, והוכיחו שאומנם אינם איזומורפים.
   ג. לפחות עבור שניים מן המבנים שתיארתם בסעיף א' תארו מבנה איזומורפי שאינו זהה לו.
   ד. מה הגודל המרבי של מחלקת איזומורפיזם (כלומר מה הגודל המרבי של קבוצת מבנים שכולם שונים אך איזומורפים זה לזה) – כרגיל כל המבנים בעולם $A=\{a,b\}$.
   ה. האם יש מחלקת איזומורפיזם מגודל 1 – אם כן, תנו דוגמה.
   ו. מה מספר מחלקות האיזומורפיזם.